

# Morphologie Mathématique

Lionel Lacassagne  
Institut d'Electronique Fondamentale  
Lionel.lacassagne@ief.u-psud.fr

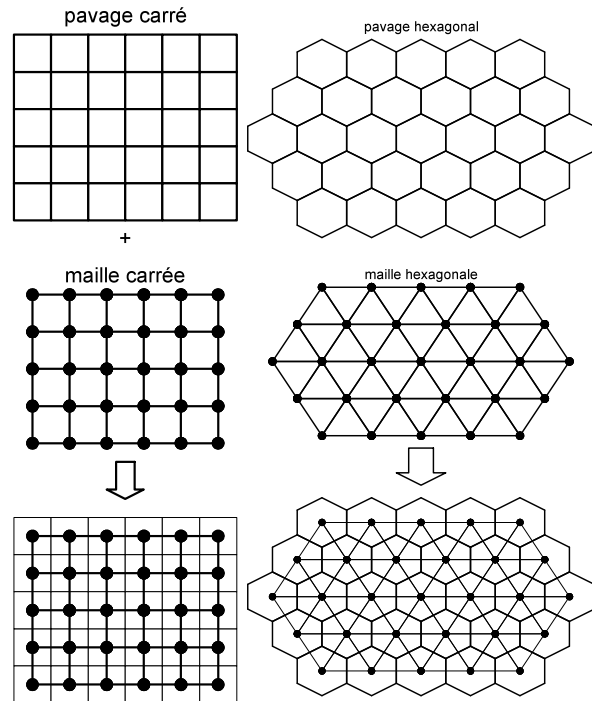
## Plan général

---

- notion de topologie
- Morphologie Mathématique binaire
  - dilatation
  - érosion
- Morphologie Mathématique en niveau de gris
- Autres opérateurs de morphologie mathématique
  - transformation en distance

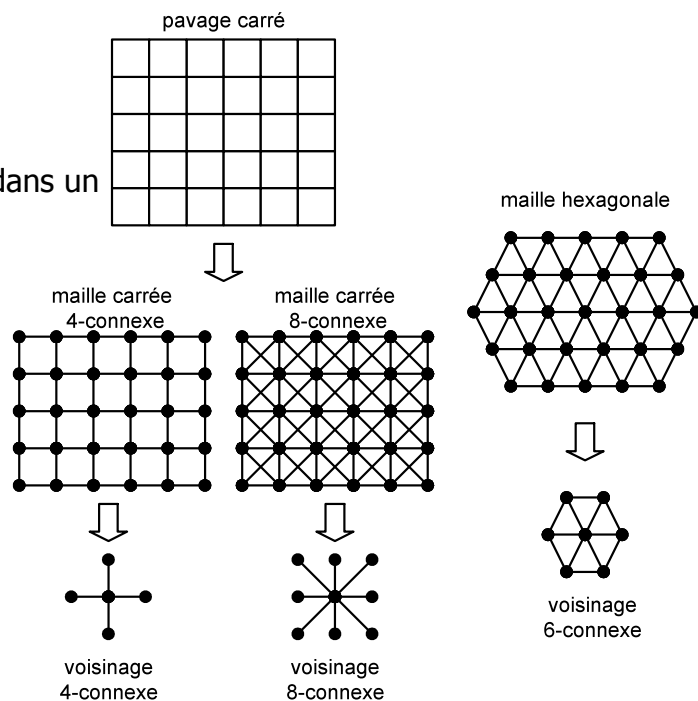
## Notion de topologie: Maille et pavage

- Dualité entre maillage et pavage

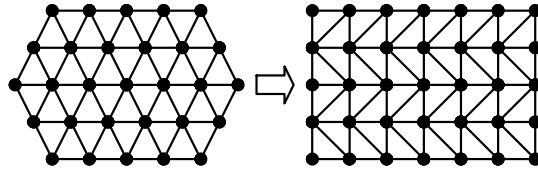


## Notion de topologie: Maille et voisinage

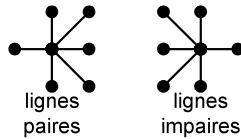
- Maille carrée
  - facilement implantable dans un processeur
  - voisinage 4C
  - voisinage 8C
- Maille hexagonale:
  - meilleures propriétés: isentropique, distance
  - voisinage 6C



- Plaquage d'un maillage hexagonal sur un maillage carré



- Voisinage "6-connexe"
  - deux configurations: lignes paires, lignes impaires

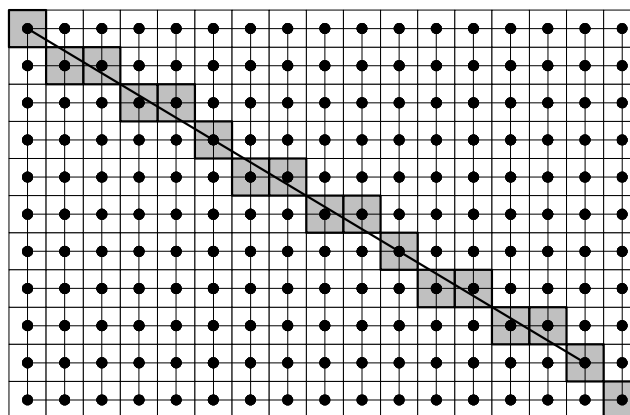


5

## géométrie discrète

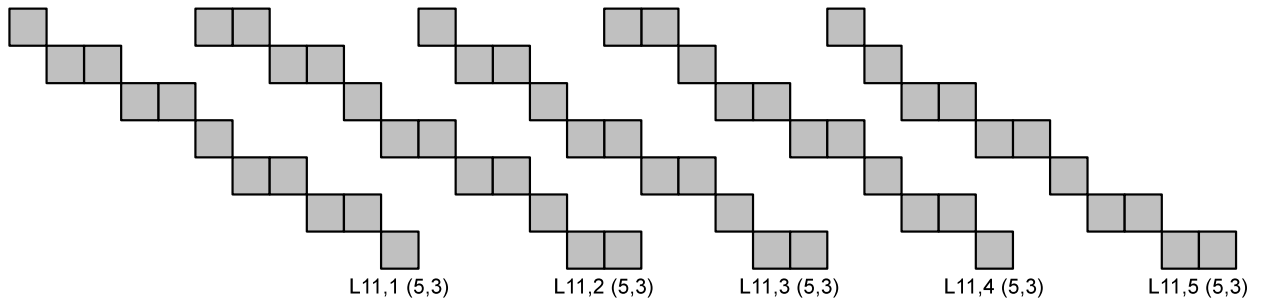
---

- Exemple de droite discrète (construction de Brésenham)



6

- Ensemble de famille de droite de vecteur directeur (5,3)

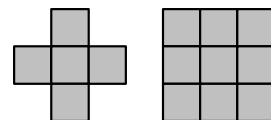


7

## élément structurant

---

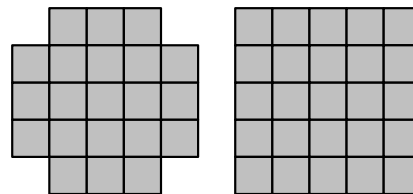
- Définition:
  - voisinage d'élément qui détermine quel pixels participent au calcul d'un opérateur de MM



boule 3x3  
4-connexe

boule 3x3  
8-connexe

- Exemples:
  - boules/disques 3x3 en 4C et 8C

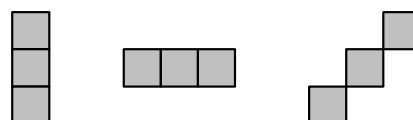


boule 5x5  
8-connexe

boule 5x5  
8-connexe

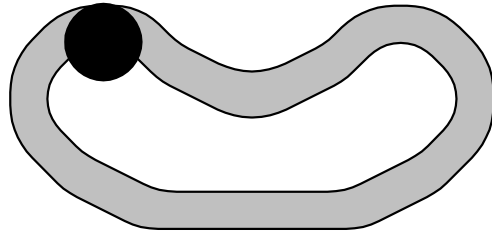
- boules/disques 5x5

- ES favorisant une direction



8

- Opérateurs de base
- érosion
  - suppression des pixels de bord, suivant:
    - l'élément structurant:
      - sa forme,
      - son diamètre



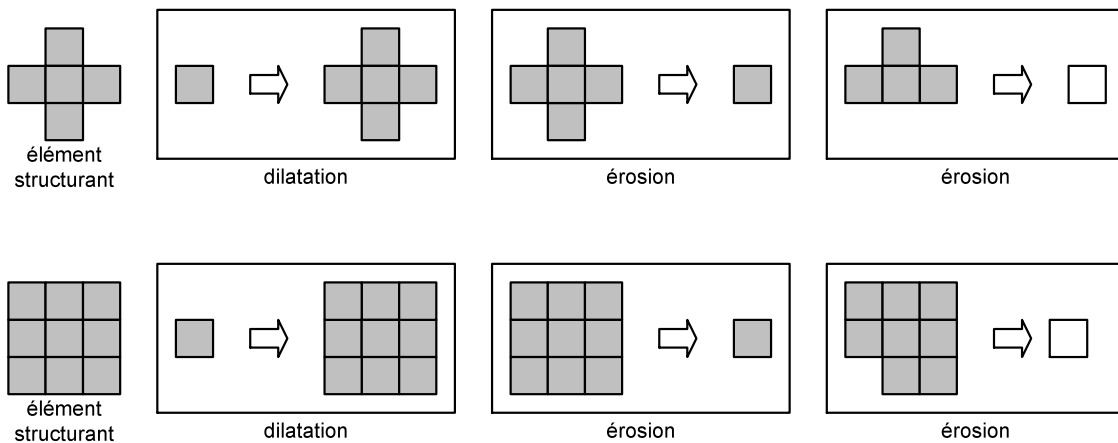
- dilatation
  - ajout des pixels sur le bord suivant l'ES
- Notation
  - érosion:  $Y = Es(X) = X - S$
  - dilatation:  $Y = Ds(X) = X + S$

Implantation

- Dilatation sous forme de OR sur le voisinage
- Érosion sous forme de AND sur le voisinage

morphologie mathématique binaire: exemple basique

- érosion et dilatation sur des cas simples



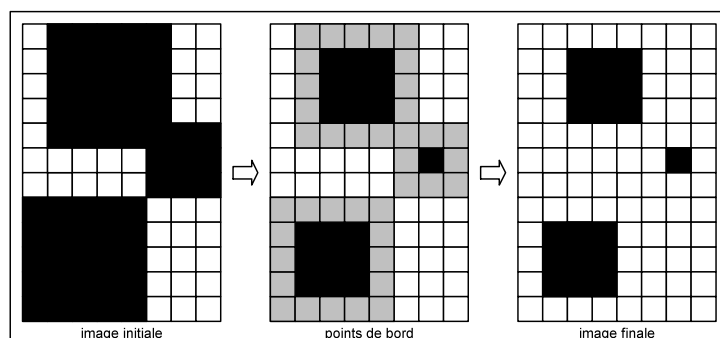
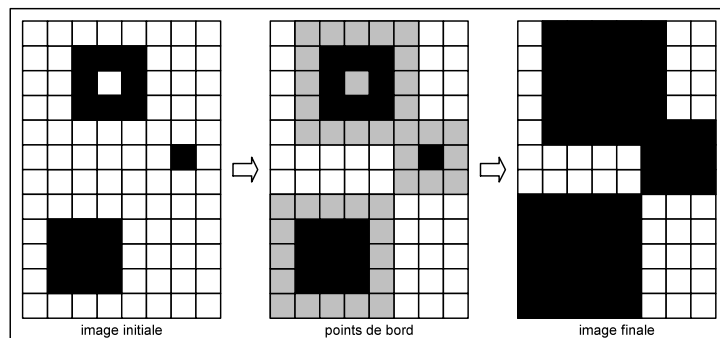
- Opérations supplémentaires: ouverture et fermeture
- Ouverture: érosion puis dilatation par le même ES
- Fermeture: dilatation puis érosion par le même ES
- Notations
  - Ouverture:  $O_s(X) = (X - S) + S$
  - Fermeture:  $F_s(X) = (X + S) - S$
- idempotence
  - Les opérateurs OR, AND, MIN et MAX sont idempotents =  $f(x) = f(x(fx))$
  - Les opérateurs ouverture et fermetures sont aussi idempotents
  - On ne les applique qu'une seule fois (pour un ES donné)

11

## morphologie mathématique binaire: exemple #1

---

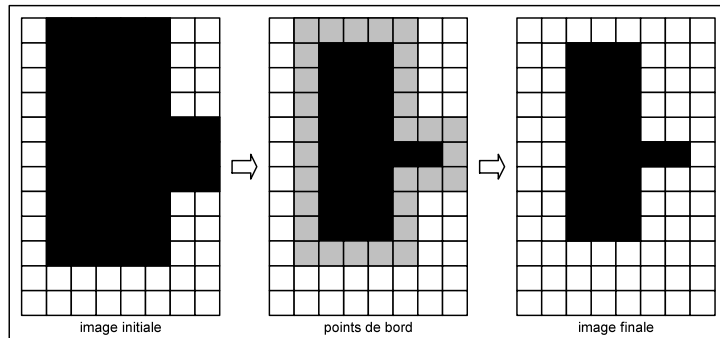
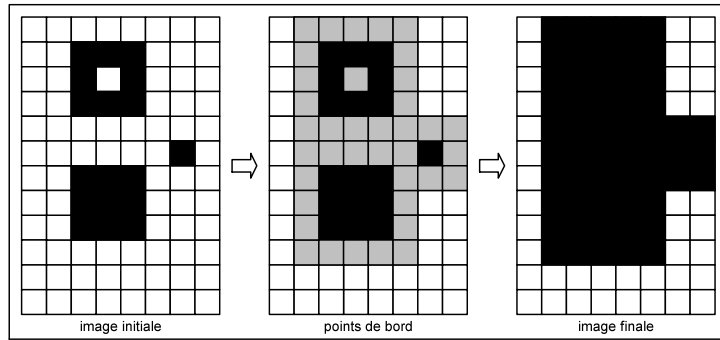
- Fermeture 3x3 8C
  - dilatation 3x3 8C
  - puis
  - érosion 3x3 8C



12

- Fermeture 3x3 8C

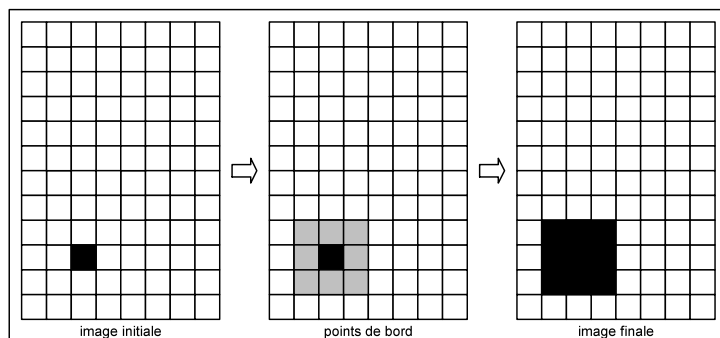
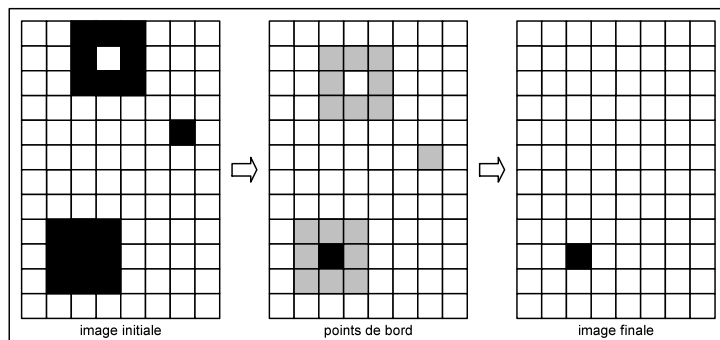
- dilatation 3x3 4C
- puis
- érosion 3x3 4C



13

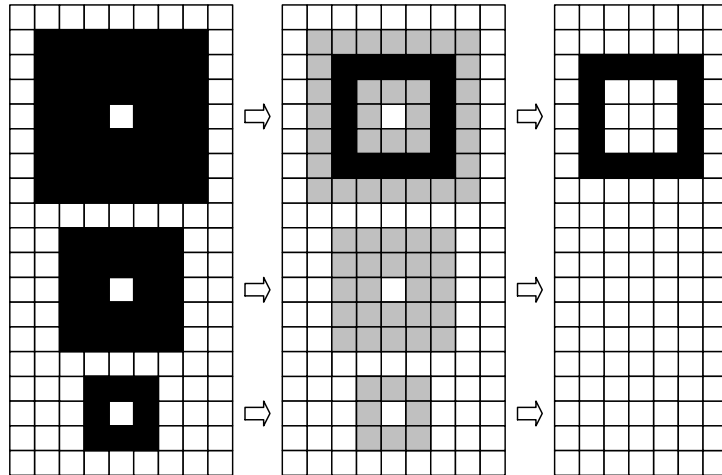
- Ouverture 3x3 8C

- érosion 3x3 8C
- puis
- dilatation 3x3 8C



14

- Erosion 3x3 de composantes connexes (tores) avec trous
  - Quelle doit être l'épaisseur de la composante pour qu'après érosion il reste quelque chose ?



15

## morphologie mathématique niveau de gris

---

- Opérateurs de base
  - érosion: extraction du "inf" sur le voisinage
  - dilatation: extraction du "sup" sur le voisinage
  - Ouverture et fermeture
- Implantation
  - érosion: calcul du minimum
  - dilatation: calcul du maximum
  - relation d'ordre:  $Es(X) \leq X \leq Ds(X)$
  - implantation très rapide en C
  - implantation encore plus efficace en Altivec et SSE2 (instructions multimédia), car les instructions min et max existent (contrairement au C scalaire)

16



## érosion 3x3, 5x5, 7x7, 9x9

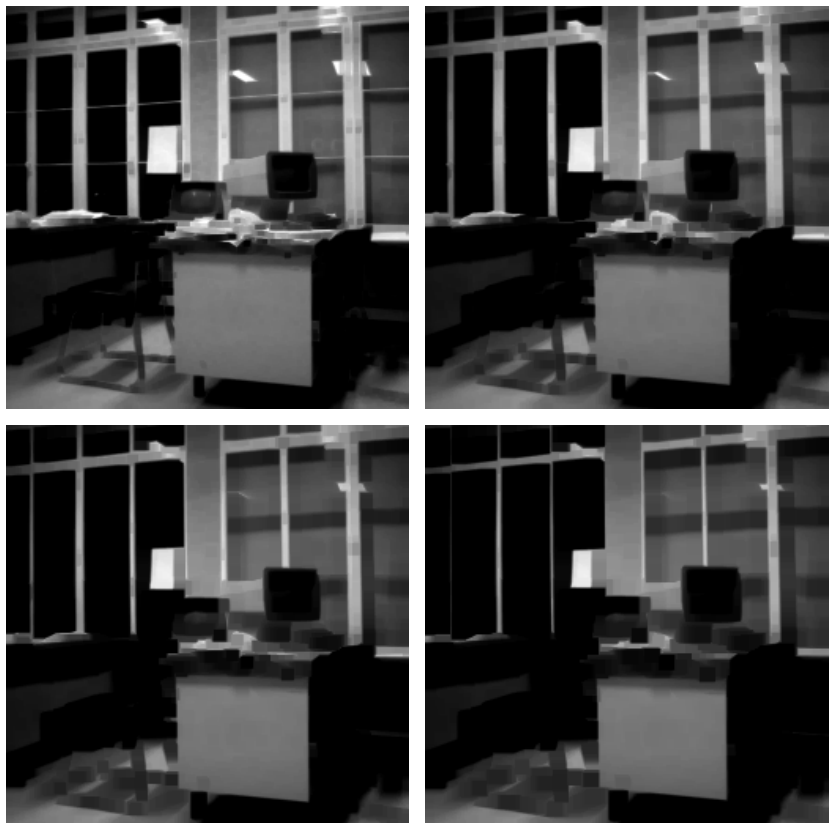
---

- Érosion des zones claires
- Dilatation des zones sombres



## érosion 3x3, 5x5, 7x7, 9x9

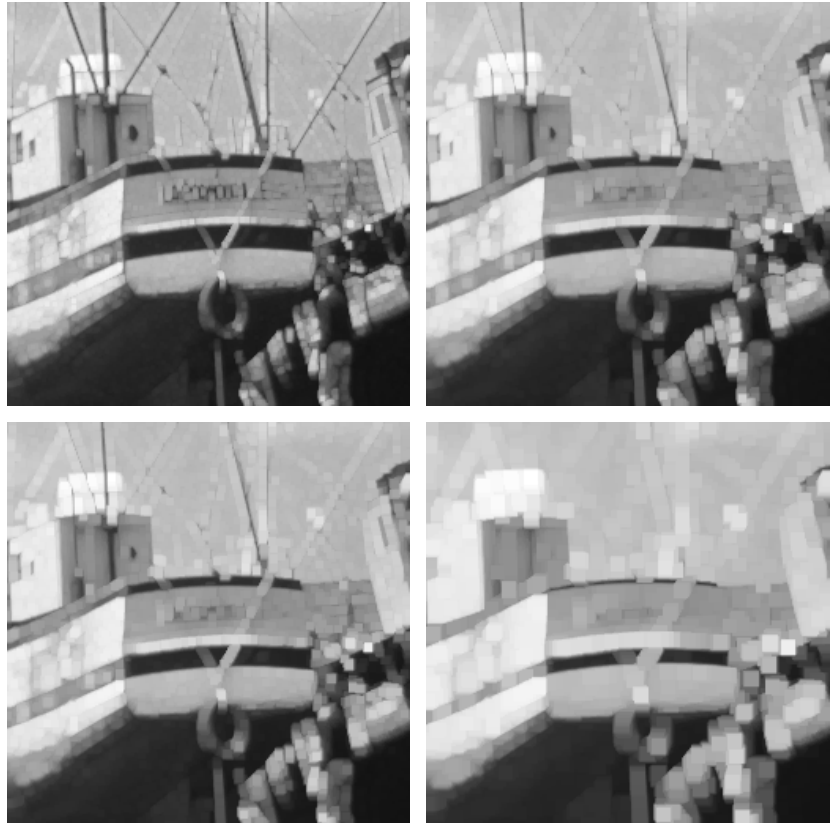
---



## Dilatation 3x3, 5x5, 7x7, 9x9

---

- Dilatation des zones claires
- érosion des zones sombres



## Dilatation 3x3, 5x5, 7x7, 9x9

---

Observations:

Tâches « carrées »

Forme due à l'élément structurant

=> prendre des éléments structurants plus ronds



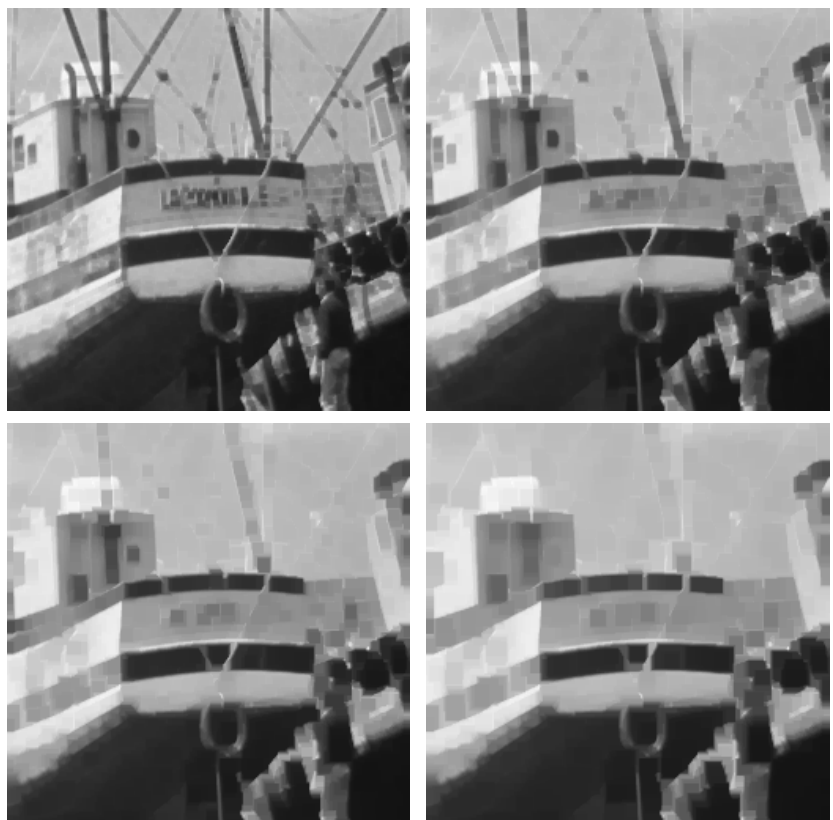
Ouverture 3x3, 5x5, 7x7, 9x9

---



Fermeture 3x3, 5x5, 7x7, 9x9

---



## Fermeture 3x3, 5x5, 7x7, 9x9

---



## Ouverture 3x3, 5x5, 7x7, 9x9

---



- Filtres Alternés Séquentiels (FAS)
  - enchaînement d'ouvertures de tailles différents
  - exemple :  $FAS_{7 \times 7}(X) = O_{7 \times 7}(O_{5 \times 5}(O_{3 \times 3}(X)))$
- Intérêts des filtres FAS: très grande robustesse au bruit
  - on élimine au fur et à mesure des amas de bruit de + en + grands
- Problème: grande complexité de calcul
- Solution: décomposition des ouvertures en séries d'opérateurs simples

25

### FAS sans bruit

---



26

## FAS avec bruit gaussien

---



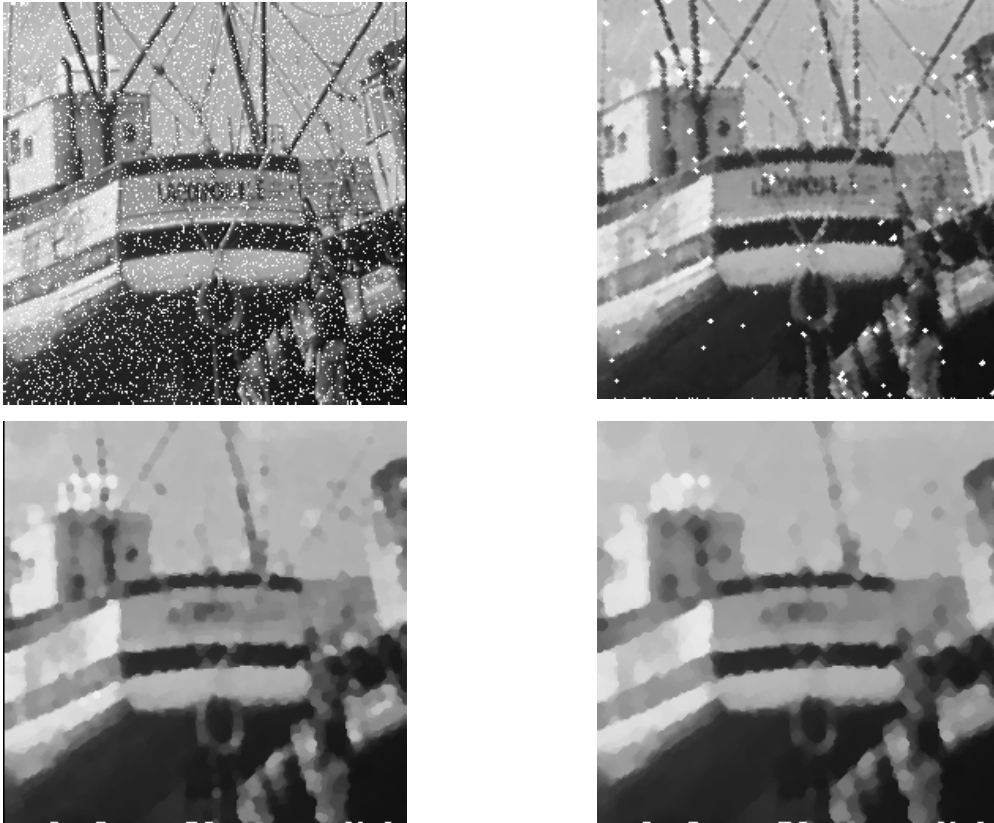
27

## FAS avec bruit impulsionnel faible

---



28



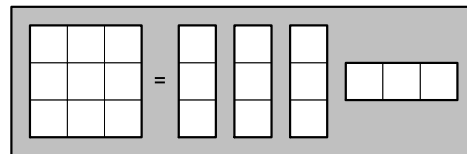
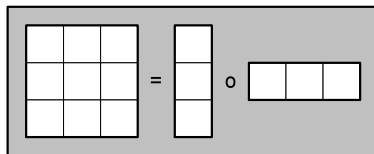
29

---

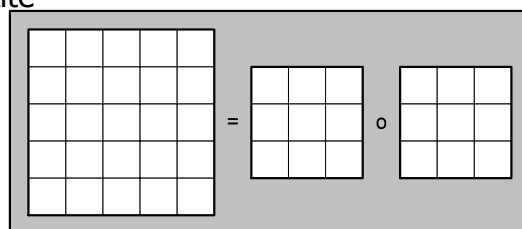
morphologie mathématique: opérateurs séparables

---

- Règles de transformations:
  - Opérateurs "2D" séparables en 2 opérateurs "1D"
    - avec/sans accès mémoire

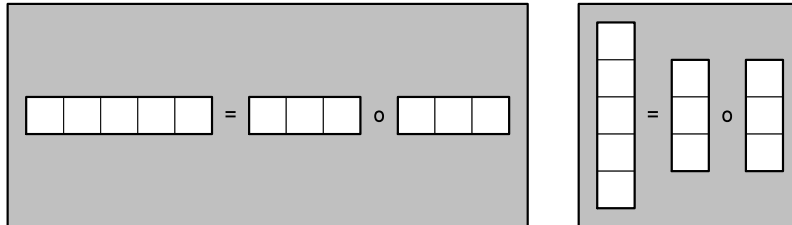


- Opérateurs "2D" de grande taille remplaçable par des opérateurs "2D" de taille plus petite



30

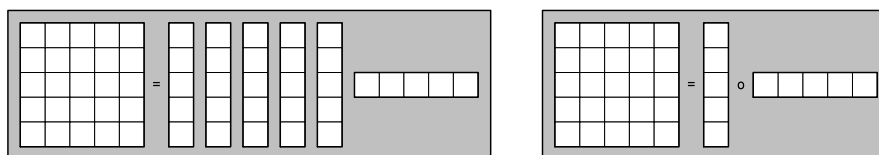
- Opérateurs "1D" de grande taille remplaçable par des opérateurs "1D" de taille plus petite



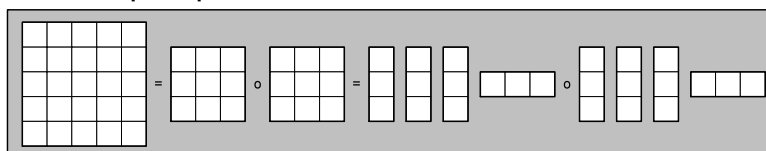
- Contrainte: les opérateurs concernés doivent être idempotent
  - opérateurs idempotents: max, min, and, or
  - opérateurs non idempotents: add, sub

31

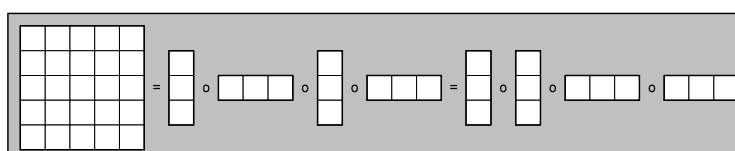
- Décomposition des opérateurs 5x5
  - opérateurs 1D



- opérateurs plus petits



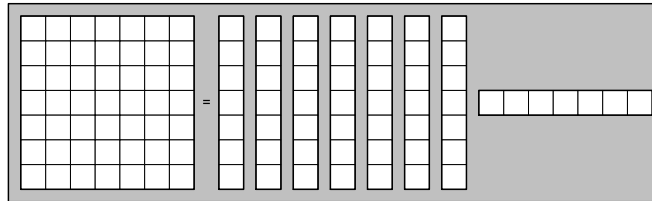
- ré-arrangement possible



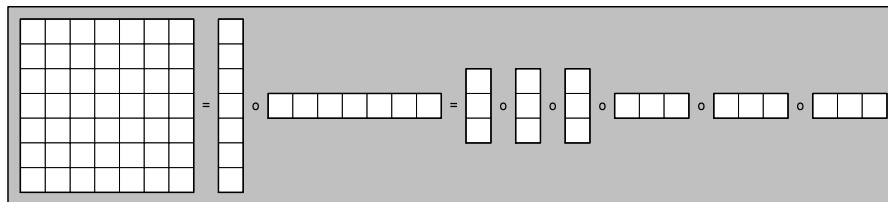
32



- Décomposition des opérateurs 7x7
  - opérateurs 1D

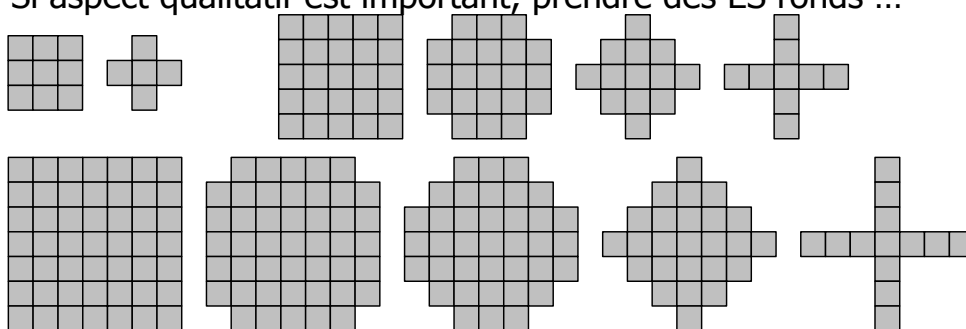


- opérateurs simple et ré-arrangement

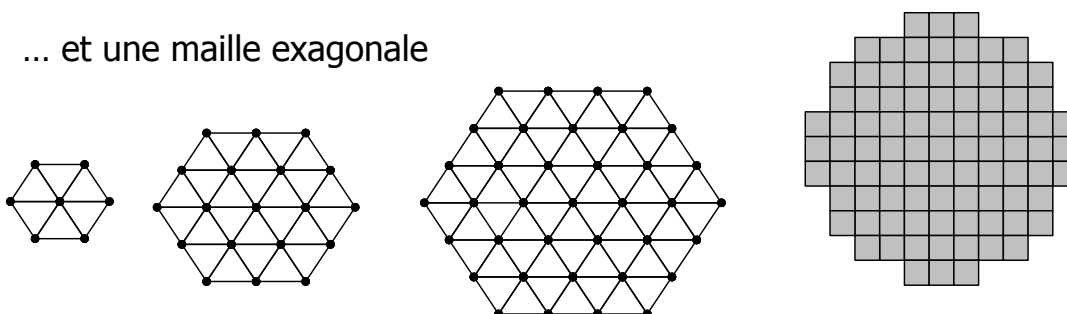


33

- Si aspect vitesse est important (nécessité opérateurs séparables): prendre des ES carrés
- Si aspect qualitatif est important, prendre des ES ronds ...



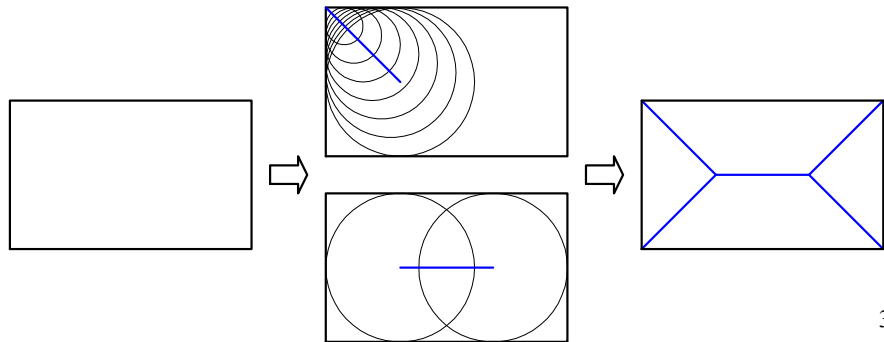
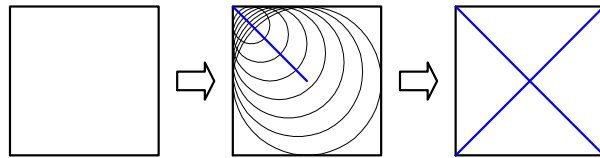
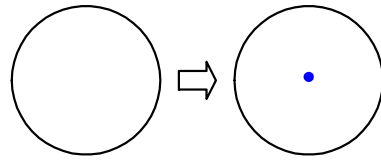
- ... et une maille exagonale



34

• Construction #1:

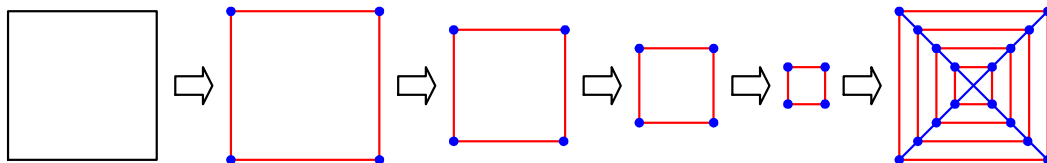
- ensemble des centres des cercles de plus grand diamètre
- => construction géométrique



35

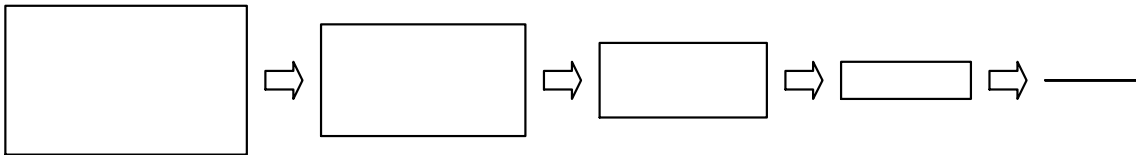
Construction #2:

- ensemble des points où se rencontrent deux "front de feu" lorsqu'on enflamme la forme (ensemble de points équidistants) -> transformée en distance



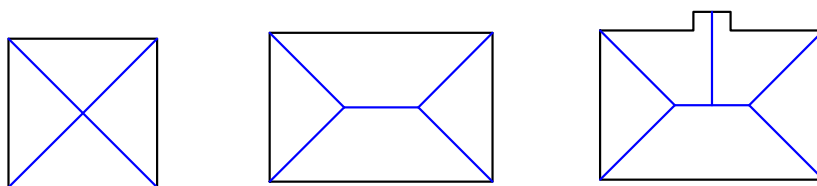
36

- Construction #3
  - érode ultime (ne change pas la topologie) -> amincissement



37

- Remarques:
  - il n'existe pas un squelette unique en géométrie discrète
  - le squelette dépend de la méthode de calcul
  - le calcul du squelette est très sensible au "bruit" de la forme
    - squelette du carré versus squelette du rectangle
    - squelette du rectangle avec barbules



38

- Hit or Miss transform
  - L'élément structurant est constitué de 2 éléments structurants T1,T2
  - T1 est codé avec des "1", T2 est codé avec des "0" (codage complémentaire)
  - certains éléments peuvent être codés "indifférents" avec un "x"
  - permet un codage et une représentation simple  $T = T1 \cup T2$
- Ensemble des éléments structurants
  - A partir d'un élément on déduit les autres par rotations de 45°

- Exemple

1	1	1
x	1	x
0	0	0

- Amincissement (thinning)
  - érosion conditionnelle qui conserve la topologie (la connexité)
  - 8 ES

1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>x</td><td>1</td><td>x</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	1	1	x	1	x	0	0	0	2	<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>x</td><td>1</td><td>x</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	0	0	0	x	1	x	1	1	1	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>x</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>x</td><td>0</td></tr></table>	1	x	0	1	1	0	1	x	0	4	<table border="1"><tr><td>0</td><td>x</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>x</td><td>1</td></tr></table>	0	x	1	0	1	1	0	x	1
1	1	1																																									
x	1	x																																									
0	0	0																																									
0	0	0																																									
x	1	x																																									
1	1	1																																									
1	x	0																																									
1	1	0																																									
1	x	0																																									
0	x	1																																									
0	1	1																																									
0	x	1																																									
5	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>x</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>x</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	x	1	x	1	1	0	x	0	0	6	<table border="1"><tr><td>x</td><td>1</td><td>x</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>x</td></tr></table>	x	1	x	0	1	1	0	0	x	7	<table border="1"><tr><td>0</td><td>0</td><td>x</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>x</td><td>1</td><td>x</td></tr></table>	0	0	x	0	1	1	x	1	x	8	<table border="1"><tr><td>x</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>x</td><td>1</td><td>x</td></tr></table>	x	0	0	1	1	0	x	1	x
x	1	x																																									
1	1	0																																									
x	0	0																																									
x	1	x																																									
0	1	1																																									
0	0	x																																									
0	0	x																																									
0	1	1																																									
x	1	x																																									
x	0	0																																									
1	1	0																																									
x	1	x																																									

- Remarque
  - ici chaque ES donne naissance à 4 configurations 3x3 complètement définies en fait  $2^{(nb \text{ de } x)}$

<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	1	1	0	1	0	0	0	0	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	1	1	0	1	1	0	0	0	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	1	1	1	1	0	0	0	0	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1																																					
0	1	0																																					
0	0	0																																					
1	1	1																																					
0	1	1																																					
0	0	0																																					
1	1	1																																					
1	1	0																																					
0	0	0																																					
1	1	1																																					
1	1	1																																					
0	0	0																																					

- Problème de codage et d'implantation
- Solution matérielle (pour implantation sur FPGA par exemple):
  - calcul par opération logique
  - soit (a,b,c,d,e,f,g,h,i) les 9 points du voisinage
  - alors:  
 $r = a \text{ AND } b \text{ AND } c \text{ AND } e \text{ AND NOT}(g) \text{ AND NOT}(h) \text{ AND NOT}(i)$

1	1	1
x	1	x
0	0	0

a	b	c
d	e	f
g	h	i

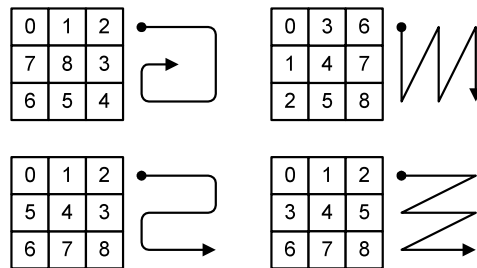
- Problème
  - complexité non constante:
    - nb d'opérations logiques:  $9 - (\text{nb de } x)$
    - nb de configurations non constant:  $2^{(\text{nb de } x)}$
  - grande complexité (par rapport aux précédents opérateurs): 8 ES
  - dans le cas de l'amincissement:  $8 \times 4 = 32$  configurations

41

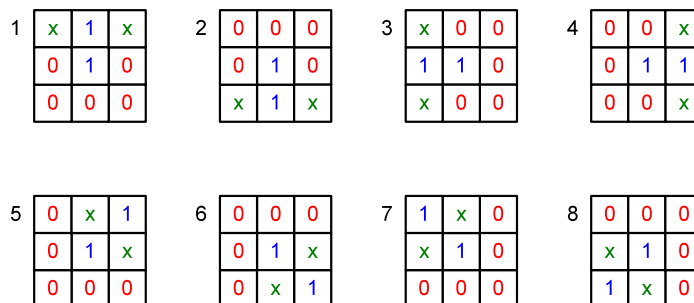
- Solution logicielle:
  - calcul par LUT (Look Up Table)
  - une LUT est une table qui contient le résultat d'un calcul complexe ou implantant un opérateur non disponible sur une machine (par exemple la division sur certains DSP -> LUT[i] contient  $i/9$  pour la normalisation du noyau 3x3 de moyennage)
- Hit or Miss LUT
  - 1 LUT par ES (soit 8 LUT)
  - contenu de la LUT: 1 si la configuration est vérifiée, 0 sinon
  - adressage de la LUT: conversion du voisinage 3x3 en une adresse

42

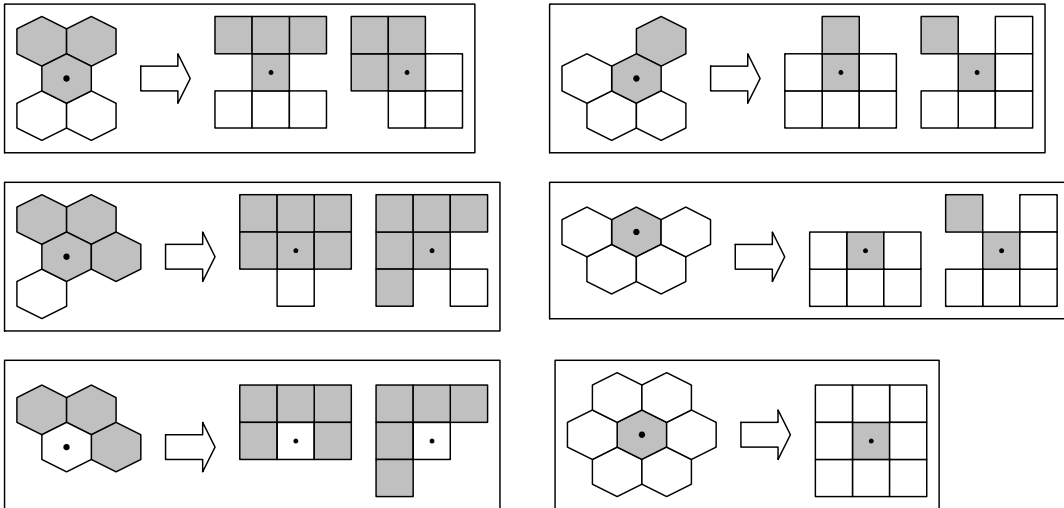
- Calcul de l'adresse d'une LUT
  - soit 9 points  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$
  - l'adresse a d'accès à la LUT est:  
 $a = x_0 + 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 16x_4 + 32x_5 + 64x_6 + 128x_7 + 256x_8$
- il y a bijection entre la configuration et l'adresse
- Au moins 4 enchaînements possibles des 9 points:



- Ebarbulage (pruning)
  - post traitement de l'amincissement pour enlever des barbulles
  - Enlève les points extrêmes des segments

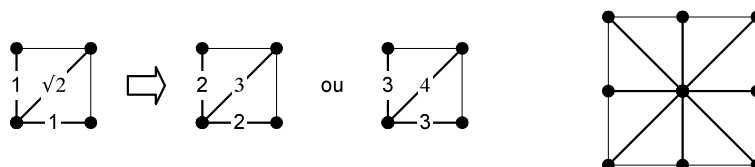


- ensemble d'éléments structurants pour transformation en tout ou rien
  - problème: ES définis sur une maille hexagonale à transformer pour une maille carrée (4C ou 8C)



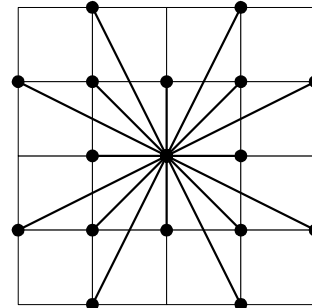
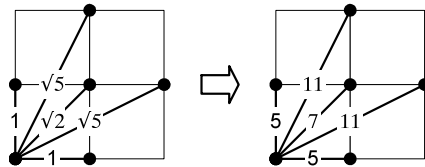
45

- Distance de Chamfer:
  - approximation de la distance euclidienne
  - calcul en nombres entiers
- Algorithme
  - couple (ou triplet de valeurs) approximant les distances discrètes sur la grille
  - classiquement: approximation de  $(1, \sqrt{2})$  par  $(2, 3)$  ou  $(3, 4)$



46

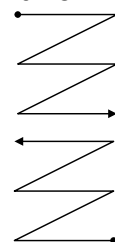
- Autres distances de Chamfer:
  - approximation de  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{5})$  par  $(5, 7/5, 11/5)$



- Références
  - Edouard Thiel
  - <http://pageperso.lif.univ-mrs.fr/~edouard.thiel/index.html>

47

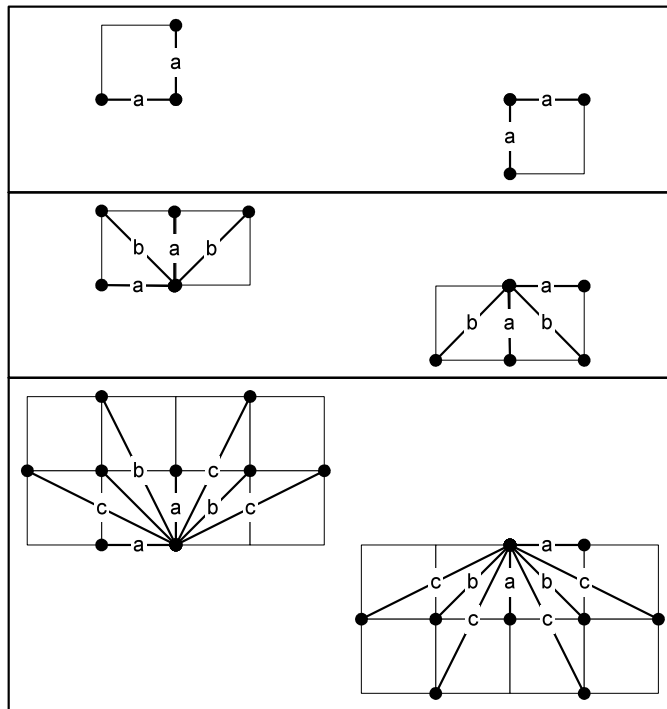
- Algorithme
  - propagation du minimum sur un voisinage de points: application de la formule
  - 2 balayages de l'image
    - balayage classique (haut -> bas)
    - balayage inversé (bas vers haut, mais aussi droite -> gauche)
- points du voisinage
  - dépend de la connexité,
  - dépend du balayage
  - en fait: points du "passé" par rapport au sens de balayage, pour une connexité donnée



48

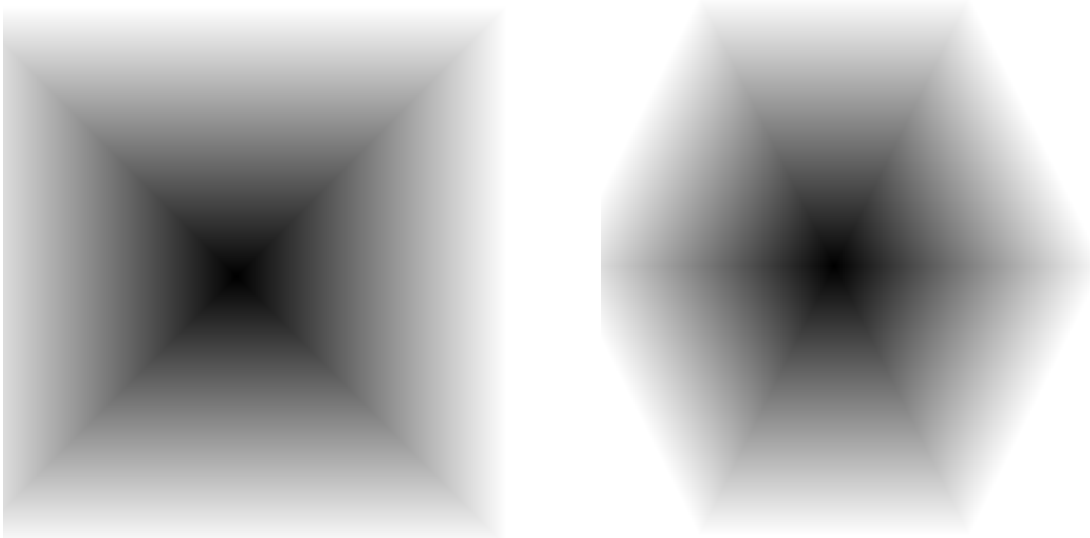


- Points du voisinage



49

- Distance 4-Connexe, distance 6-Connexe



50

- Deux calculs de distances possibles
  - distance interne à une région -> pour calcul du squelette
  - distance externe, entre régions -> calcul de la distance discrète entre région